

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园

首页

新随笔

联系

订阅

管理

<

2022年3月

>

日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力

欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的

园龄：4年7个月

粉丝：288

关注：5

+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动的科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔

我的评论

我的参与

最新评论

我的标签

积分与排名

积分 - 457097

排名 - 1198

单变量微积分笔记29——反常积分和瑕积分

我们已经学习了有限区间上的积分，但对于无穷的情况和区间上有奇点的情况仍无法理解。这就需要无穷积分和瑕积分来处理了，它们看起来十分有趣。

增长和衰减速率

通过上一章的内容，我们已经可以做出一些总结，在洛必达法则中，如果 $f(x) \ll g(x)$ 且 $f, g > 0$ ，那么当 $x \rightarrow \infty$ 时， $f(x)/g(x) \rightarrow 0$ ；如果 $f(x) \gg g(x)$ 且 $f, g > 0$ ，那么当 $x \rightarrow \infty$ 时， $f(x)/g(x) \rightarrow \infty$

$$x > 0, p > 0$$

$$\ln x \ll x^p \ll e^x \ll e^{x^2}$$

$$\frac{1}{\ln x} \gg \frac{1}{x^p} \gg e^{-x} \gg e^{-x^2}$$

反常积分

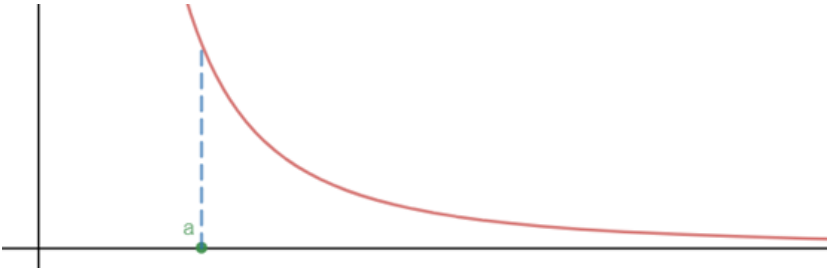
收敛和发散

反常积分是这样定义的：

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^N f(x)dx$$

从定义来看，也就是正常积分的上限 N 趋于 ∞ 。如果极限存在，它就是收敛的，否则就是发散的。

积分表示面积，在收敛的情况下，面积是有限的，如下图所示，面积最终将趋于定值：



在发散的情况下，面积是无限的，比如一条与 x 轴平行的直线。

计算反常积分

示例1：

$$k > 0, \int_0^\infty e^{-kx}dx = ?$$

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

- 1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)

最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积)
如果点积小于0，即夹角小于90°，这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫大人

$$\int_0^N e^{-kx} dx = -\frac{e^{-kx}}{k} \Big|_0^N = -\frac{1}{ke^{kN}} + \frac{1}{k}$$
$$\int_0^\infty e^{-kx} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{ke^{kN}} + \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{k}$$

也可以采用一种更简短的写法：

$$\int_0^\infty e^{-kx} dx = -\frac{e^{-kx}}{k} \Big|_0^\infty = -\frac{e^{-\infty}}{k} - \left(-\frac{1}{k} \right) = 0 + \frac{1}{k}$$

示例2：

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = ?$$
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^\infty = \ln \infty - \ln 1 = \infty$$

在上限是∞的时候，1/x的积分是发散的。这似乎与直觉相反，虽然被积函数f(x) = 1/x随着x的递增而减小，但它的衰减速度还不够“快”，它仍然是发散的。

示例3：

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = ?$$
$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \Big|_1^\infty = \frac{\infty^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1}$$

到这里就可以结束了，如果我们还想继续探索一下，就要看看P的取值范围。首先p的值不能为1，当p < 1时，

$$\frac{\infty^{-p+1}}{-p+1} \rightarrow \infty, \quad \int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \infty - \frac{1}{-p+1} = \infty$$

当p > 1时，

$$\frac{\infty^{-p+1}}{-p+1} \rightarrow 0, \quad \int_1^\infty \frac{dx}{x^p} = 0 - \frac{1}{-p+1} = \frac{1}{p-1}$$

对于该例来说，p < 1时是发散的，p > 1时时收敛的。

审敛法

我们通常对反常积分是发散还是收敛很感兴趣，然而计算极限往往令人沮丧，幸而我们了解增长和衰减速率，将被积函数替换成更快或更慢的函数，以此判断反常积分的收敛性，这种方法就是审敛法。

审敛法大概是这样描述的：

当x→∞且f,g ≥ 0时，

- 1. 如果f(x) ~ g(x)，即f(x)/g(x)→1，则 $\int_a^\infty f(x) dx = \int_a^\infty g(x) dx$

2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos) 很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At) 有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

提个issue，最速降线中

$v = \{2gh\}^{1/2}$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

2. 如果 $g(x) >> f(x)$ 且 $\int_a^\infty g(x) dx$ 是收敛的，则 $\int_a^\infty f(x) dx$ 也是收敛的
3. 如果 $g(x) << f(x)$ 且 $\int_a^\infty g(x) dx$ 是发散的，则 $\int_a^\infty f(x) dx$ 也是发散的

示例1

判断 $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+10}}$ 的收敛性

如果求解原函数，就需要动用三角替换，经过一些列转换后再求解极限，可能还要使用洛必达法则.....现在尝试使用审敛法判断。

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+10}} \sim \frac{1}{\sqrt{x^2}} = \frac{1}{x}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+10}} \sim \int_1^\infty \frac{dx}{x}$$

所以答案是发散的。

这里需要注意的是，相似的反常积分的下限是1。这么做有两点原因，第一点当然是分母不能为0；第二点是，当上限为 ∞ 是，下限不构成影响结果的主要因素。在反常积分中，我们关注的是趋于 ∞ 的尾端。将下限写为1仅仅是便于理解和书写，实际上可以写成大于0的任意数。

示例2

判断 $\int_{10}^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+3}}$ 的收敛性

$$\int_{10}^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3+3}} \sim \int_{10}^\infty x^{-3/2} dx = -\frac{1}{2} x^{-1/2} \Big|_{10}^\infty = -\frac{1}{2\sqrt{\infty}} - C = C$$

结果是收敛的。

示例3

判断 $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx$ 的收敛性

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = 2 \int_0^\infty e^{-x^2} dx \leq 2 \int_0^1 e^{-x^2} dx + 2 \int_1^\infty e^{-x} dx = C_1 + (-e^{-x}) \Big|_1^\infty = C$$

结果是收敛的，其中用到的衰减率是 $1 \leq x \leq x^2$, $-x^2 \leq -x$

瑕积分

定积分的奇点

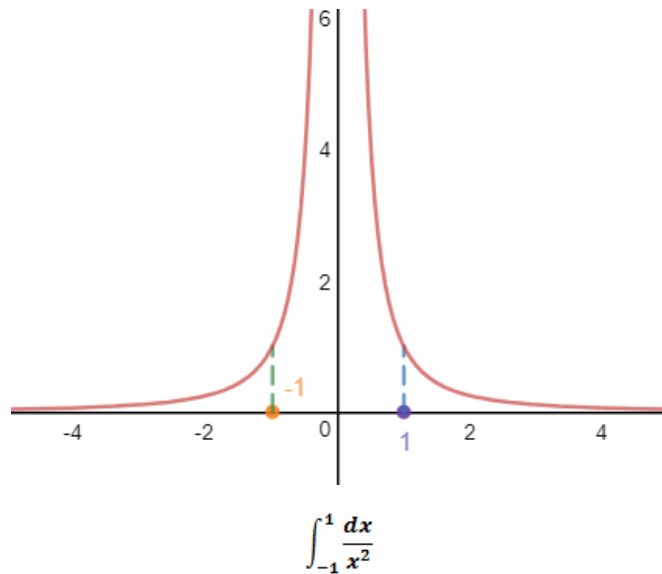
$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = ?$$

这很简单，

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -2$$

这个答案对吗？

我们熟知 $1/x^2$ 的图像，积分表示面积，那么它不可能是负数，一定是哪个环节出现了问题。



如果只计算 $x \geq 0$ 时的面积：

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_0^1 = -1 + \frac{1}{0} = ?$$

这个结果是无意义的，对 $1/x^2$ 在 $[0,1]$ 上积分没有任何意义。换个角度看这个问题，假设积分下限是一个无限接近0的数值，结果趋近于 ∞ ，这个积分是发散的。

在这个例子中，将0称为积分的奇点，对于不同的积分来说，奇点也不同。积分在奇点上是无意义的。

结论是，如果我们这计算时不注意积分的奇点，很容易导致计算错误。看来在今后的积分运算中又多了一条注意事项。

瑕积分的定义

将存在奇点的积分称为瑕积分，用数学符号表示就是：

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 f(x) dx$$

需要注意的是 a 是从右侧接近0，这实际上和处理无穷的思路是一样的。

$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ 就是一个典型的瑕积分，奇点是0，结果是 ∞ 。

收敛和发散

与反常积分一样，我们关注的是瑕积分在奇点的收敛性。

当 $x \rightarrow 0^+$ 时：

$$\int_{0^+}^N \frac{dx}{\sqrt{x}} \ll \int_{0^+}^N \frac{dx}{x} \ll \int_{0^+}^N \frac{dx}{x^2}$$

当 $x \rightarrow +\infty$ 时：

$$\int_a^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} \gg \int_a^\infty \frac{dx}{x} \gg \int_a^\infty \frac{dx}{x^2}$$

这里用红色的被积函数表示发散，绿色表示收敛，很容易对其进行计算。

$$\int_{0^+}^N \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2x^{1/2} \Big|_{0^+}^N = 2\sqrt{N}$$

$$\int_{0^+}^N \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_{0^+}^N = \ln N - \infty = \infty$$

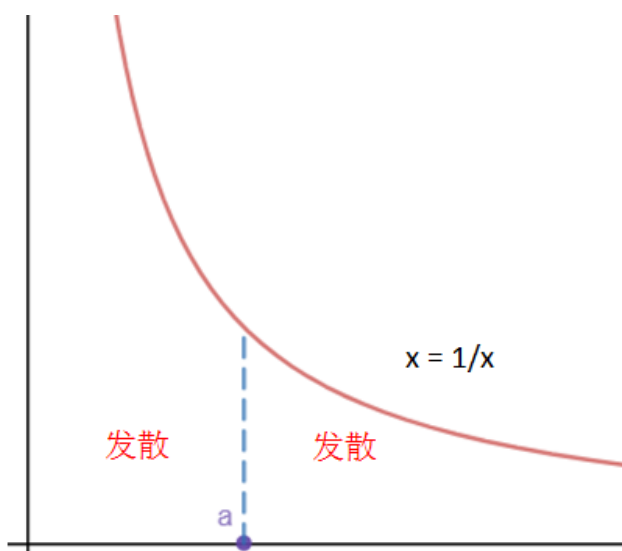
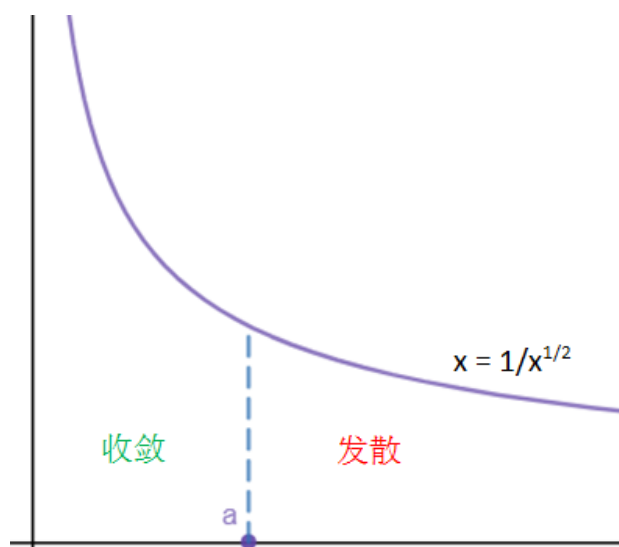
$$\int_{0^+}^N \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{0^+}^N = -\frac{1}{N} - \infty = \infty$$

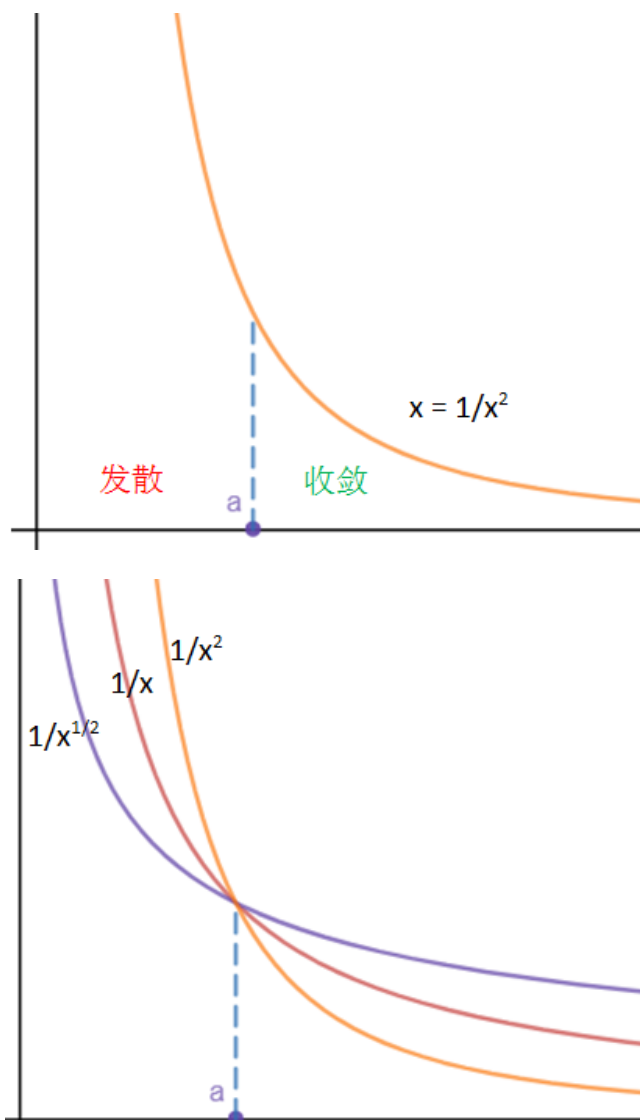
$$\int_a^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2x^{1/2} \Big|_a^\infty = 2\sqrt{\infty} - 2\sqrt{a} = \infty$$

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_a^\infty = \ln \infty - \ln a = \infty$$

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_a^\infty = -\frac{1}{\infty} + \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$$

可以通过图像直观地了解一下：





示例

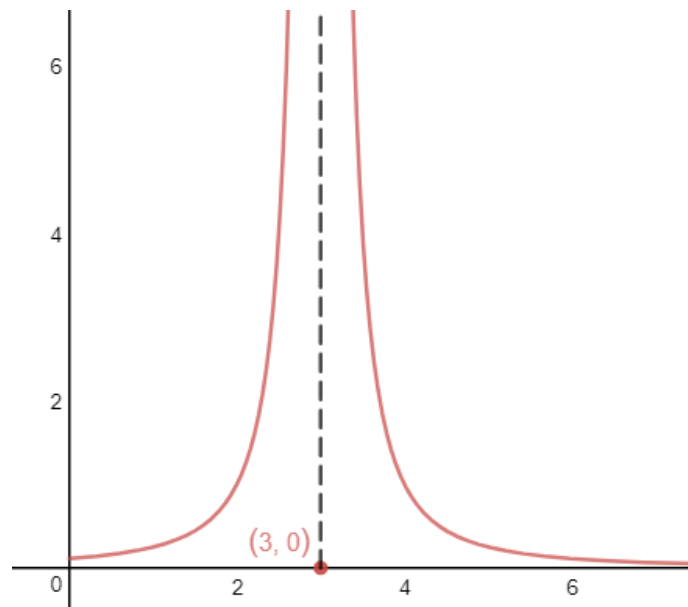
判断 $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x-3)^2}$ 的收敛性

看起来很简单,

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x-3)^2} \sim \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2}$$

当 $x \rightarrow \infty$ 时, $1/x^2$ 的积分是收敛的, 所有结论是收敛。

真相确实如此吗? $1/(x-3)^2$ 的图像如下:



看起来没那么简单了，答案应该是发散才对。问题的原因就在于积分存在奇点，就是 $x = 3$ 。一个简单的判定奇点判定法是当 $x = 3$ 时被积函数没有意义。

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x-3)^2} = \int_0^a \frac{dx}{(x-3)^2} + \int_a^{\infty} \frac{dx}{(x-3)^2}, \quad a > 3$$

等式右侧的第一个积分跨越了奇点，在奇点一节中提到过：积分在奇点上是无意义的，如果一个积分跨越了奇点，那么这个积分就是发散的。所以最后答案是发散。

综合示例

示例1

判断积分的收敛性 $\int_0^{\infty} \cos x dx$

$$\int_0^{\infty} \cos x dx = -\sin x \Big|_0^{\infty} = -\sin \infty$$

其结果是在-1和1之间波动，所以题目积分是不可积的。

更简单的方法是在0和 ∞ 之间， $\cos x$ 的图像是来回摆动的，并未趋近于某个值，可以直接得出不可积的结论。

示例2

判断积分的收敛性 $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

积分的奇点是0，需要判断这奇点上是否是收敛的。

先用分部积分求解，

$$u = \ln x, u' = \frac{1}{x}, v' = \frac{1}{\sqrt{x}}, v = 2\sqrt{x}$$

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \ln x - \int \frac{2\sqrt{x}}{x} dx = 2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} + C$$

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = (2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x}) \Big|_0^1 = -4 - \lim_{x \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} \ln x$$

极限是 $0 \cdot \infty$ 型，需要对其进行转换以便使用洛必达法则，

$$\sqrt{x} = \frac{1}{x^{-1/2}}, 2\sqrt{x} \ln x = \frac{2 \ln x}{x^{-1/2}}, \frac{(2 \ln x)'}{(x^{-1/2})'} = \frac{\frac{2}{x}}{-\frac{1}{2} x^{-3/2}} = -4x^{1/2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} -4x^{1/2} = 0$$

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = -4 - \lim_{x \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} \ln x = -4$$

题目积分在奇点收敛于0，最终收敛于-4。

示例3

判断积分的收敛性

积分的奇点是0，积分跨越了奇点，需要分成两半：

$$\int_{-1}^1 x^{-2/3} dx = \int_{-1}^0 x^{-2/3} dx + \int_0^1 x^{-2/3} dx = 3x^{1/3} \Big|_{-1}^0 + 3x^{1/3} \Big|_0^1 = 6$$

题目积分在奇点收敛于0，最终收敛于6。

示例4

曲线 $f(x) = 1/x$ 绕 x 轴旋转，求 x 在 $[1, \infty)$ 上形成图形的表面积和体积。

$$\begin{aligned} Area &= \int_1^{\infty} 2\pi y \sqrt{1 + (y')^2} dx \\ &= 2\pi \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{1 + (1/x^2)^2}}{x} dx \\ &= 2\pi \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{1 + x^4}}{x^3} dx \\ &= 2\pi \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x^4}}{x^3} dx \\ &= 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx \\ &= \infty \end{aligned}$$

上面的计算通过弧长计算表面积（弧长和表面积可参见[数学笔记25——弧长和曲面面积](#)），再利用审敛法求反常积分。这看起来没什么问

题，但是有些繁琐。由于我们已经知道 $1/x$ 在 $x \rightarrow \infty$ 上是发散的，所以可以直接判断表面积也发散。

根据圆盘法（圆盘法可参见[数学笔记17——定积分的应用2（体积）](#)）求计算体积：

$$V = \int_1^{\infty} \pi y^2 dx = \pi \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = -\frac{\pi}{x} \Big|_1^{\infty} = \pi$$

出处：微信公众号“我是8位的”

本文以学习、研究和分享为主，如需转载，请联系本人，标明作者和出处，非商业用途！

扫描二维码关注作者公众号“我是8位的”



随笔

分类: [单变量微积分](#)

标签: [反常积分](#), [奇点](#), [瑕积分](#)

好文要顶

关注我

收藏该文

我是8位的

关注 - 5

粉丝 - 288

+加关注

3

推荐

0

反对

« 上一篇: [单变量微积分笔记28——不定式和洛必达法则](#)

» 下一篇: [单变量微积分笔记30——无穷级数和收敛判定](#)

posted on 2017-12-08 22:36

我是8位的

阅读(11609)

评论(0)

编辑

收藏

举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

登录后才能查看或发表评论，立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) [博客园首页](#)

- 【推荐】华为 HWD 2022 故事征集，分享最打动你的科技女性故事
- 【推荐】华为开发者专区，与开发者一起构建万物互联的智能世界

cloud.e-iceblue.cn

JAVA Office
文档在线编辑
APIs

打开

编辑推荐:

- 革命性创新，动画杀手铜 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计（十二）—— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]：内存缓存与分布式缓存的使用
- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的？
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇

#她的梦想在发光#
HWD科技女性故事有奖征集
活动时间: 2022年3月8日~3月18日



最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档：他缺乏工程师才能，不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光：年薪18万美元，够养家，不够买海景房
 - 两张照片就能转视频！Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推“杀手级”功能，可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人：本金63万，月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:

博客园

Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes